PCSI 1
2009-2010

Colle 13 première semaine

Du 26/04 au 30/04

1 Espaces vectoriels de dimension finie

- Sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs. Opérations sur ces derniers. Exemples (notamment si $P_0, \ldots, P_n$ sont une famille de polynômes de degrés échelonnés alors $\mathrm{Vect}(P_0, \ldots, P_n) = \mathbb{K}_n[X]$).
- Famille génératrice. Toute sur-famille d'une famille génératrice est génératrice. Si on ôte un vecteur combinaison linéaire des autres alors elle reste génératrice.
- Famille libre, liée. Cas particulier de deux vecteurs : la famille est liée ssi ils sont colinéaires. Exemples. Toute sur-famille d'une famille liée est liée. Toute sous-famille d'une famille libre est libre. Si on ajoute un vecteur à une famille libre, alors elle reste libre ssi ce vecteur n'est pas dans l'espace vectoriel engendré par la famille de départ.
- Base. Bases canoniques de $\mathbb{K}^n$ et $\mathbb{K}_n[X]$. Coordonnées dans une base. Base de $E \times F$. Base de $F \oplus G$.
- Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ alors $\mathrm{Im}\, f$ est engendrée par l'image par f d'une famille génératrice de E.
- Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E et $(f_1, \ldots, f_n)$ une famille de vecteurs de F, alors il existe une unique $f \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $f(e_i) = f_i$.
- f est un isomorphisme de E dans F ssi l'image par f d'une base de E est une base de F.
- Définition d'un espace vectoriel de dimension finie (i.e. qui admet une famille génératrice finie). Théorème de la base incomplète. Corollaires : si $E \neq \{0\}$ est de dim finie alors il admet une base, de toute famille génératrice on peut extraire une base.
- Dans un ev de dim finie une famille libre a toujours moins d'éléments qu'une famille génératrice **(ADMIS)**.
- Dans $E \neq \{0\}$ de dim finie toutes les bases ont le même cardinal appelé dimension de E. On convient $\dim \{0\} = 0$.
- Si $\dim E = n$ alors une famille de n vecteurs de E est une base de E ssi elle est libre ssi elle est génératrice. Si $\dim E = n$ alors E est isomorphe à $\mathbb{K}^n$. Deux espaces vectoriels de dimension finies sont isomorphes ssi ils ont la même dimension. $\dim E \times F = \dim E + \dim F$, $\dim \mathcal{L}(E, F) = \dim E \times \dim F$.
- Si E est de dim finie et F un sous-ev de E alors F est de dim finie et $\dim F \leq \dim E$ avec égalité ssi $E = F$.
- Tout sous-ev d'un ev de dim finie admet un supplémentaire. $\dim (F + G) = \dim F + \dim G - \dim (F \cap G)$, avec le cas particulier : $\dim (F \oplus G) = \dim F + \dim G$. F et G sont supplémentaires dans E ssi 2 des 3 propositions suivantes sont vérifiées : (i) $\dim F + \dim G = \dim E$ (ii) $F \cap G = \{0\}$ (iii) $F + G = E$.
- Rang d'une famille de vecteurs. Le rang est égal au cardinal ssi la famille est libre. Rang d'une application linéaire : $\mathrm{rg}(f) = \dim \mathrm{Im}\, f$.
- Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ alors f réalise un isomorphisme de tout supplémentaire de $\mathrm{Ker}\, f$ dans E sur $\mathrm{Im}\, f$. Théorème du rang. f surjective ssi $\mathrm{rg} f = \dim F$. f est injective ssi $\mathrm{rg} f = \dim E$. Si $\dim E = \dim F$ alors f bijective ssi f injective ssi f surjective. Invariance du rang par composition avec un isomorphisme.

- Définition d'un hyperplan d'un ev de dim finie ≥ 1. H est un hyperplan ssi H est le noyau d'une forme linéaire non nulle.

2 Suites récurrentes doubles

3 Calcul intégral : <u>QUE LE COURS</u>

- Fonctions en escalier sur un segment. Intégrale d'une fonction en escalier sur un segment. Propriétés : linéarité, positivité, croissance, Chasles.
- Fonctions continues par morceaux sur un segment. Approximation d'une fonction continue par morceaux par des fonctions en escalier sur un segment (ADMIS).
- Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment. Propriétés : linéarité, positivité, croissance, Chasles, inégalité de la moyenne, inégalité triangulaire généralisée.
- Pour une fonction f continue et positive sur un segment : s'il existe x_0 tel que $f(x_0) > 0$ alors son intégrale est strictement positive et si son intégrale est nulle alors f est nulle.
- Extension au cas des fonctions complexes.
- Définition d'une primitive. Deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante. Existence des primitives pour une fonction continue.
- Théorème fondamental de l'analyse : si F est une primitive de f alors $\displaystyle\int_a^b f = F(b) - F(a)$.
- Intégration par parties.
- Changement de variable.
- Intégrale et fonctions paires et impaires.
- Intégrale des fonctions périodiques.
- Liste de primitives usuelles.
- Formule de Taylor-Lagrange avec reste intégral. Inégalité de Taylor-Lagrange.
- Sommes de Riemann. L'approximation de l'intégrale d'une fonction continue par la méthode des rectangles est admise. Par contre elle a été démontrée pour une fonction $\mathcal{C}^1$ et dans ce cadre on a montré que l'erreur est un $O(\frac{1}{n})$ où n est le nombre de rectangles.
- Approximation par la méthode des trapèzes pour une fonction $\mathcal{C}^2$ (ADMIS).